

# Mecklenburg-Vorpommern



---

Nachname, Vorname des Prüflings

## **Musterabitur**

### **Mathematik (CAS)**

**Grundkurs**

**Prüfungsteil B – komplexe Aufgaben**

## Hinweise für den Prüfling

### Aufgabenbearbeitung:

Tragen Sie zuerst auf dem Deckblatt Ihren Nachnamen und Vornamen ein.

Der Prüfungsteil B beinhaltet

- eine Pflichtaufgabe Analysis (Aufgabe 1),
- zwei Wahlaufgaben Geometrie (Aufgaben 2 und 3) sowie
- zwei Wahlaufgaben Stochastik (Aufgaben 4 und 5).

Bearbeiten Sie die Pflichtaufgabe Analysis, eine Wahlaufgabe Geometrie und eine Wahlaufgabe Stochastik.

Sofern ein entsprechender Hinweis in einer Teilaufgabe gegeben wird, sollen graphische Darstellungen im vorliegenden Aufgabendokument angefertigt werden, andernfalls verwenden Sie bitte bereitgestelltes Papier bzw. Millimeterpapier. Geben Sie auf der Reinschrift Ihren Namen sowie die bearbeiteten Wahlaufgaben an und nummerieren Sie die Seiten Ihrer Arbeit fortlaufend.

### Bearbeitungszeit:

Die Bearbeitungszeit für die Prüfungsteile A und B beträgt einschließlich Auswahlzeit 285 Minuten.

Nach Abgabe des Prüfungsteils A steht Ihnen der verbleibende Zeitraum für die Bearbeitung dieses Prüfungsteils B zur Verfügung.

### Hilfsmittel:

Folgende Hilfsmittel stehen zur Verfügung:

- eine an der Schule eingeführte Formelsammlung (bzw. Tafelwerk),
- ein an der Schule zugelassenes Computeralgebrasystem (CAS),
- Zeichengeräte,
- ein Wörterbuch der deutschen Rechtschreibung in gedruckter oder digitaler Form,
- ein zweisprachiges Wörterbuch in gedruckter oder digitaler Form für Prüflinge mit nichtdeutscher Herkunftssprache.

### Bewertung:

Die Lösungen sind in einer sprachlich korrekten, mathematisch exakten und äußerlich einwandfreien Form darzustellen. In der Niederschrift müssen die Lösungswege nachvollziehbar sein.

In der Aufgabe 1 zur Analysis sind 25 Bewertungseinheiten (BE) erreichbar und in den Wahlaufgaben jeweils 15 BE. Bearbeitet ein Prüfling mehr Wahlaufgaben als gefordert, so wird jeweils die Aufgabe gewertet, welche die höchste Anzahl an BE erbringt.

Maximal zwei Bewertungseinheiten können zusätzlich vergeben werden bei guter Notation und Darstellung sowie eleganten, kreativen und rationellen Lösungswegen. Maximal zwei Notenpunkte können bei mehrfachen Formverstößen abgezogen werden.

## 1 Pflichtaufgabe Analysis

Gegeben ist die in  $\mathbb{R}$  definierte ganzrationale Funktion  $f$ . Der Graph von  $f$  wird mit  $G_f$  bezeichnet.

- 1.1 Die Funktion  $f$  hat die Form  $f(x) = a \cdot x^4 + b \cdot x^3 + c \cdot x^2 + d \cdot x + e$ . Ihr Graph  $G_f$  besitzt folgende Eigenschaften: 4 BE

- $G_f$  verläuft durch die Punkte  $A(-2 \mid 8)$  und  $B\left(1 \mid \frac{5}{16}\right)$ .
- Im Punkt  $C(2 \mid 0)$  hat  $G_f$  einen Wendepunkt.
- Die Tangente an  $G_f$  im Punkt  $A$  hat die Gleichung  $y = -2x + 4$ .

Bestimmen Sie eine Gleichung der Funktion  $g$ .

$$\text{Zur Kontrolle: } f(x) = \left(2 + \frac{x}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{x}{2}\right)^3$$

- 1.2 Geben Sie die Koordinaten des Schnittpunkts von  $G_f$  mit der  $y$ -Achse an. 1 BE

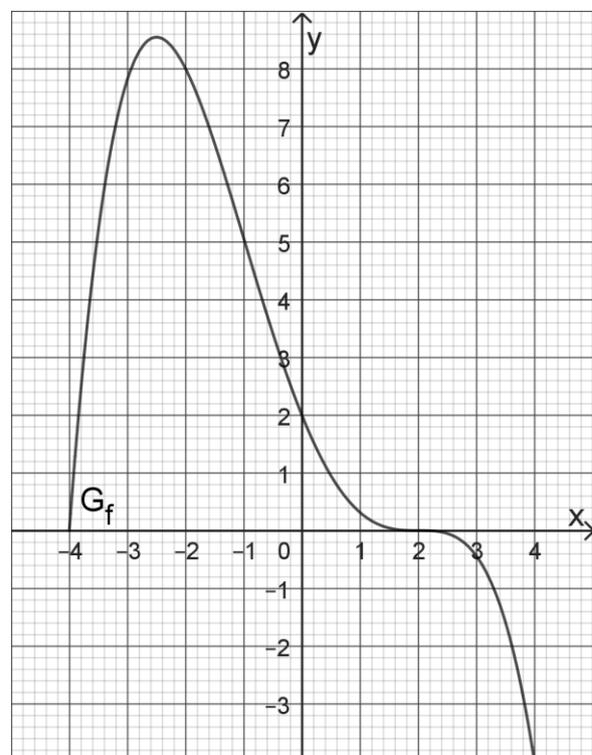
- 1.3  $W_1(2 \mid 0)$  ist ein Wendepunkt von  $G_f$ . Weisen Sie rechnerisch nach, dass auch  $W_2\left(-1 \mid \frac{81}{16}\right)$  ein Wendepunkt von  $G_f$  ist und dass  $G_f$  keine weiteren Wendepunkte hat. 3 BE

Die Gerade  $g$  verläuft durch  $W_1$  und  $W_2$ .

- 1.4 Die Abbildung zeigt  $G_f$  für  $-4 \leq x \leq 4$  im Koordinatensystem. Zeichnen Sie  $g$  in dieses Koordinatensystem ein und weisen Sie nach, dass  $g$  durch die Gleichung  $y = -\frac{27}{16}x + \frac{27}{8}$  dargestellt wird. 3 BE

- 1.5  $G_f$  und  $g$  schließen drei Flächenstücke ein. 4 BE

Zeigen Sie, dass die Summe der Inhalte zweier dieser Flächenstücke ebenso groß ist wie der Inhalt des dritten.



Im Längsschnitt eines Berghangs kann dessen Profillinie für  $-5 \leq x \leq 4$  modellhaft durch den Graphen der in  $\mathbb{R}$  definierten Funktion  $h$  mit  $h(x) = \frac{1}{4} \cdot f\left(\frac{1}{2} \cdot x\right)$ , d. h.  $h(x) = \frac{1}{1024} \cdot (8+x) \cdot (4-x)^3$ , beschrieben werden. Es soll davon ausgegangen werden, dass der Hang in Querrichtung nicht geneigt ist. Im verwendeten Koordinatensystem beschreibt die  $x$ -Achse die Horizontale; eine Längeneinheit entspricht 100 Metern in der Wirklichkeit

- 1.6 Der Hochpunkt des Graphen von  $h$  hat die  $x$ -Koordinate  $-5$ . Geben Sie die zugehörige  $y$ -Koordinate an und stellen Sie die Profillinie des Hangs in einem Koordinatensystem graphisch dar. 2 BE

- 1.7 Der Hang wird als Skipiste genutzt. Der Tabelle kann der Zusammenhang zwischen dem Schwierigkeitsgrad von Skipisten und deren jeweiligem maximalen Gefälle entnommen werden: 3 BE

Schwierigkeitsgrad	leicht	mittel	schwer
maximales Gefälle	bis 25 %	bis 40 %	mehr als 40 %

Ermitteln Sie den Schwierigkeitsgrad der hier betrachteten Piste.

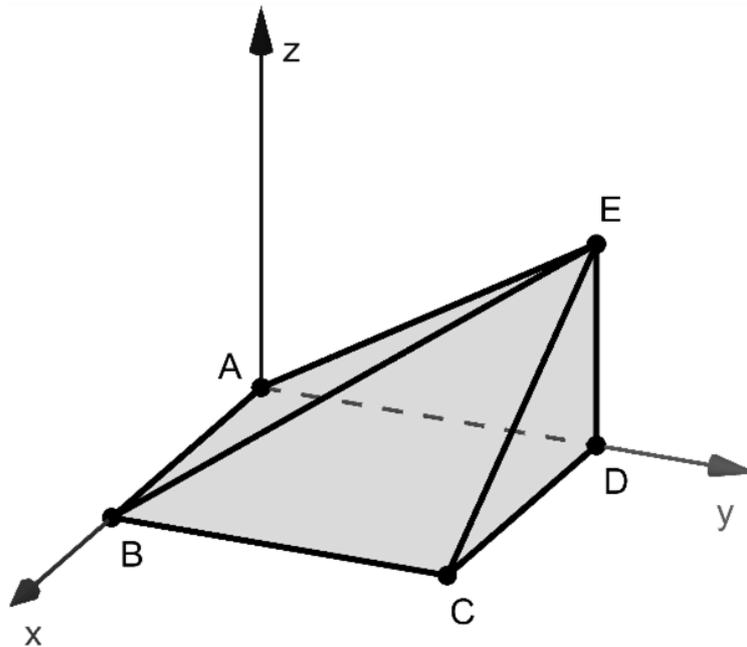
- 1.8 Am höchsten Punkt des Hangs steht ein Turm mit einer Höhe von 25 m. Es gibt zwei Abschnitte des Hangs, in denen der Turm vom Boden aus zumindest teilweise sichtbar ist. Ermitteln Sie die Lage des höher gelegenen der beiden Abschnitte. 5 BE

**Hinweis:** Von den Wahlaufgaben 2 und 3 ist **eine** zu bearbeiten.

## 2 Wahlaufgabe Analytische Geometrie

Die Eckpunkte eines Holzkörpers werden durch  $A(0|0|0)$ ,  $B(10|0|0)$ ,  $C(10|10|0)$ ,  $D(0|10|0)$  und  $E(0|10|6)$  dargestellt (vgl. Abbildung). Die Punkte B, D und E liegen im Modell in der Symmetrieebene des Körpers, zudem ist das Dreieck BCE rechtwinklig.

Eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht einem Zentimeter in der Realität.



- 2.1 Berechnen Sie den Inhalt der Oberfläche des Holzkörpers. 3 BE
- 2.2 Die quadratische Grundfläche des Holzkörpers schließt mit der Seitenfläche, die durch das Dreieck BCE dargestellt wird, einen Winkel ein. Berechnen Sie die Größe dieses Winkels. 2 BE
- 2.3 Der Holzkörper soll mit einer möglichst kurzen Linie versehen werden, die im Modell vom Eckpunkt A über die Kante  $\overline{BE}$  zum Punkt C verläuft. Die Länge dieser Linie in Zentimetern kann folgendermaßen ermittelt werden: 4 BE

$$P(10 - 10t | 10t | 6t)$$

$$\overline{PC} \circ \overline{PB} = 0 \Leftrightarrow t = \frac{25}{59}$$

$$2 \cdot |\overline{PC}| \approx 15,2$$

Erläutern Sie dieses Vorgehen.

- 2.4 Das Dreieck BCE liegt in der Ebene L. Der Schnittpunkt dieser Ebene mit der z-Achse wird mit F bezeichnet.
- 2.4.1 Zeichnen Sie F sowie die Geraden, in denen L die xz- und die yz-Ebene schneidet, in die Abbildung ein. 2 BE
- 2.4.2 Ermitteln Sie, um wie viel Prozent das Volumen des Körpers ABCDEF größer ist als das Volumen des Körpers ABCDE, ohne für diese Volumina konkrete Werte zu berechnen. 4 BE

### 3 Wahlaufgabe Analytische Geometrie

Bei Erdarbeiten werden Schuttmulden als Auffang- und Transportbehälter genutzt. Die betrachtete Schuttmulde hat die Form eines geraden Prismas mit fünfeckiger Grundfläche.

Die Ecken der Schuttmulde werden in einem Koordinatensystem durch die Punkte  $A(10|0|0)$ ,  $B(10|12|0)$ ,  $C(10|12|7)$ ,  $D(10|0|7)$ ,  $E(10|-4|5)$  und  $F(0|0|0)$  sowie  $G$ ,  $H$ ,  $I$  und  $J$  modelliert. Die Fläche  $ABGF$  stellt dabei den Boden der Schuttmulde dar. Die Mulde ist oben und links oben offen (vgl. Abbildungen 1 und 2).

Eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht einem Dezimeter in der Realität.

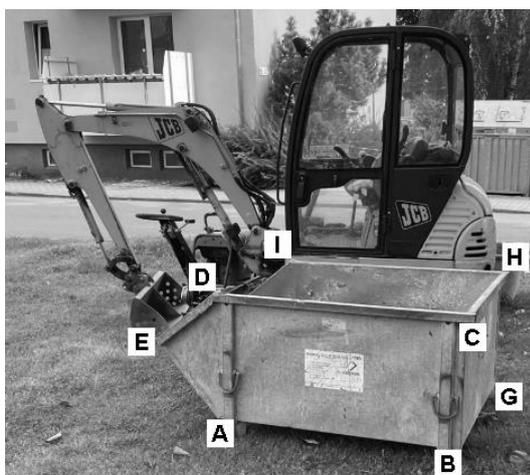


Abbildung 1: Schuttmulde mit Bagger

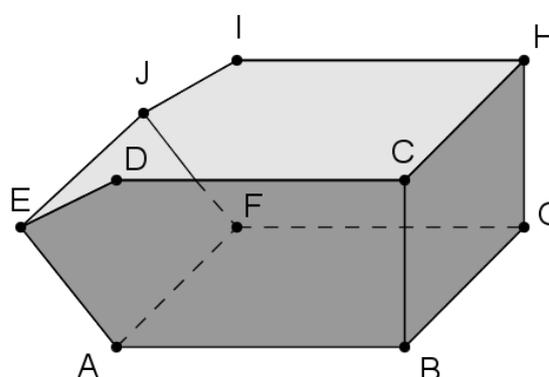


Abbildung 2: Schuttmulde im Modell

- 3.1 Die Fläche  $EAFJ$  liegt in der Ebene mit der Gleichung  $5y + 4z = 0$ . 1 BE  
Begründen Sie, dass die Fläche  $EAFJ$  senkrecht zur  $yz$ -Ebene liegt.
- 3.2 Ermitteln Sie das Volumen des Prismas  $ABCDEFGHJI$  und geben Sie das Fassungsvermögen der Schuttmulde in Kubikmetern an. 4 BE
- 3.3 In der Mulde befindet sich eine gerade, dünne Eisenstange. Das untere Ende der Stange liegt in einer Ecke der Mulde, im Modell ist dies der Punkt  $F$ . Das obere Ende lehnt in der Mitte einer gegenüberliegenden Kante an, im Modell im Mittelpunkt der Kante  $\overline{BC}$ . 6 BE  
Berechnen Sie die Länge dieser Stange in Zentimeter sowie den Neigungswinkel der Stange gegenüber dem Boden der Mulde.

- 3.4 Eine solche Schuttmulde wird auf einen ebenen horizontalen Untergrund gestellt und als Auffangbehälter für Regenwasser genutzt. Aufgrund der oben offenen Bauweise kann die Schuttmulde nicht vollständig mit Wasser befüllt werden. Durch Ankippen der Mulde wird das Auffangvolumen maximiert (siehe Abbildung 3). 4 BE

Erläutern Sie, wie die Größe des zugehörigen Neigungswinkels der Bodenfläche gegenüber dem Untergrund berechnet werden kann.

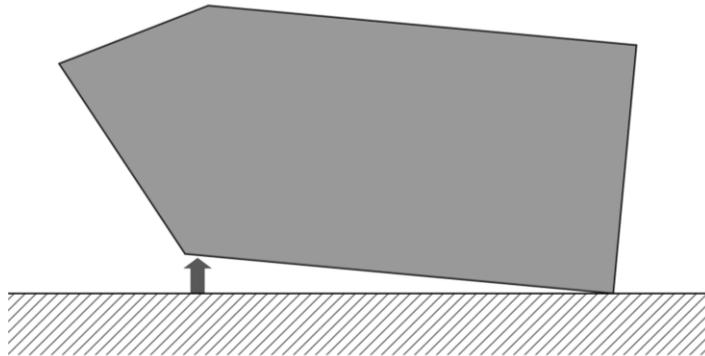


Abbildung 3: Seitenansicht des Modells der Mulde im angekippten Zustand

**Hinweis:** Von den Wahlaufgaben 4 und 5 ist **eine** zu bearbeiten.

#### 4 Wahlaufgabe Stochastik

In einem Land, in dem 80 % der Erwachsenen einen Führerschein besitzen, werden 200 Erwachsene zufällig ausgewählt. Es soll angenommen werden, dass dabei die Anzahl der ausgewählten Erwachsenen, die einen Führerschein besitzen, binomialverteilt ist.

4.1 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Anzahl der ausgewählten Erwachsenen, die einen Führerschein besitzen, vom Erwartungswert für diese Anzahl um höchstens 8 abweicht. 3 BE

4.2 Ermitteln Sie, wie groß die Anzahl der ausgewählten Erwachsenen mindestens sein müsste, damit von diesen mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90 % mehr als 160 einen Führerschein besitzen. 4 BE

4.3 In einer bestimmten Region des betrachteten Landes werden alle Fahrprüfungen eines Jahres auf einen möglichen Zusammenhang zwischen dem Alter eines Prüflings und dem Bestehen der Prüfung hin untersucht. Von insgesamt 13879 Prüflingen waren 17,9 % zum Zeitpunkt der Prüfung mindestens 30 Jahre alt. 80,0 % aller Prüflinge haben die Prüfung bestanden.

Ein Prüfling wird zufällig ausgewählt. Betrachtet werden die folgenden Ereignisse:

A: „Der Prüfling war zum Zeitpunkt der Prüfung mindestens 30 Jahre alt.“

B: „Der Prüfling hat die Prüfung bestanden.“

Weiterhin gilt  $P(A \cap B) = 0,161$ .

4.3.1 Vervollständigen Sie für diesen Sachverhalt die Vierfeldertafel in der Abbildung. 2 BE

	A	$\bar{A}$	
B			0,8
$\bar{B}$			
	0,179		1

4.3.2 Bestimmen Sie den Wert des Terms  $1 - P(A \cup B)$  und deuten Sie das Ergebnis im Sachzusammenhang. 3 BE

4.3.3 Untersuchen Sie, ob die Ereignisse A und B stochastisch unabhängig sind. 3 BE

## 5 Wahlaufgabe Stochastik

In einem Bundesland wird die Bevölkerungsgruppe derjenigen, die im Jahr 2000 geboren wurden, im Hinblick auf Schulabschlüsse untersucht. In dieser Bevölkerungsgruppe beträgt der Anteil der Personen mit Abitur 36 %. Unter den Personen mit Abitur sind 54 % weiblich, unter allen Personen ohne Abitur ist der Anteil derjenigen, die nicht weiblich sind, etwa 53 %.

5.1 Stellen Sie den Sachzusammenhang in einem beschrifteten Baumdiagramm dar. 3 BE

5.2 Ermitteln Sie den Anteil der nicht weiblichen Personen in der betrachteten Bevölkerungsgruppe. 2 BE

5.3 Bestimmen Sie für die weiblichen Personen den Anteil derjenigen mit Abitur. 3 BE

Für eine Online-Befragung werden aus der betrachteten Bevölkerungsgruppe 100 Personen zufällig ausgewählt. Es soll davon ausgegangen werden, dass unter den ausgewählten Personen die Anzahl derjenigen mit Abitur binomialverteilt ist.

5.4 Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Anzahl der ausgewählten Personen mit Abitur kleiner als der Erwartungswert dieser Anzahl ist. 3 BE

5.5 Aus der gesamten Bevölkerungsgruppe derjenigen, die im Jahr 2000 geboren wurden, werden  $n$  Personen zufällig ausgewählt. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich darunter mehr als 20 mit Abitur befinden, ist größer als 0 % und kleiner als 10 %. Ermitteln Sie alle Werte, die für  $n$  infrage kommen. 4 BE