Mecklenburg-Vorpommern

Nachname, Vorname des Prüflings

Musterabitur

Mathematik (WTR)

Grundkurs

Prüfungsteil B – komplexe Aufgaben

Hinweise für den Prüfling

Aufgaben-bearbeitung:

Tragen Sie zuerst auf dem Deckblatt Ihren Nachnamen und Vornamen ein.
Der Prüfungsteil B beinhaltet

- eine Pflichtaufgabe Analysis (Aufgabe 1),
- zwei Wahlaufgaben Geometrie (Aufgaben 2 und 3) sowie
- zwei Wahlaufgaben Stochastik (Aufgaben 4 und 5).

Bearbeiten Sie die Pflichtaufgabe Analysis, eine Wahlaufgabe Geometrie und eine Wahlaufgabe Stochastik.

Sofern ein entsprechender Hinweis in einer Teilaufgabe gegeben wird, sollen graphische Darstellungen im vorliegenden Aufgabendokument angefertigt werden, andernfalls verwenden Sie bitte bereitgestelltes Papier bzw. Millimeterpapier. Geben Sie auf der Reinschrift Ihren Namen sowie die bearbeiteten Wahlaufgaben an und nummerieren Sie die Seiten Ihrer Arbeit fortlaufend.

Bearbeitungszeit:

Die Bearbeitungszeit für die Prüfungsteile A und B beträgt einschließlich Auswahlzeit 285 Minuten.

Nach Abgabe des Prüfungsteils A steht Ihnen der verbleibende Zeitraum für die Bearbeitung dieses Prüfungsteils B zur Verfügung.

Hilfsmittel:

Folgende Hilfsmittel stehen zur Verfügung:

- eine an der Schule eingeführte Formelsammlung (bzw. Tafelwerk),
- ein an der Schule zugelassener wissenschaftlicher Taschenrechner (WTR), der nicht programmierbar und nicht graphikfähig ist und nicht über Möglichkeiten der numerischen Differentiation oder Integration oder des automatischen Lösens von Gleichungen verfügt,
- Zeichengeräte,
- ein Wörterbuch der deutschen Rechtschreibung in gedruckter oder digitaler Form,
- ein zweisprachiges Wörterbuch in gedruckter oder digitaler Form für Prüflinge mit nichtdeutscher Herkunftssprache.

Bewertung:

Die Lösungen sind in einer sprachlich korrekten, mathematisch exakten und äußerlich einwandfreien Form darzustellen. In der Niederschrift müssen die Lösungswege nachvollziehbar sein.

In der Aufgabe 1 zur Analysis sind 25 Bewertungseinheiten (BE) erreichbar und in den Wahlaufgaben jeweils 15 BE. Bearbeitet ein Prüfling mehr Wahlaufgaben als gefordert, so wird jeweils die Aufgabe gewertet, welche die höchste Anzahl an BE erbringt.

Maximal zwei Bewertungseinheiten können zusätzlich vergeben werden bei guter Notation und Darstellung sowie eleganten, kreativen und rationellen Lösungswegen. Maximal zwei Notenpunkte können bei mehrfachen Formverstößen abgezogen werden.

1 Pflichtaufgabe Analysis

1.1 Die Kosten, die einem Unternehmen bei der Herstellung einer Flüssigkeit entstehen, können durch die Funktion $K(x) = x^3 - 12x^2 + 50x + 20$ beschrieben werden. Dabei gibt $K(x)$ die Kosten in 1000 Euro an, die bei der Produktion von x Kubikmetern der Flüssigkeit insgesamt entstehen.

Abbildung 1 zeigt den Graphen von K.

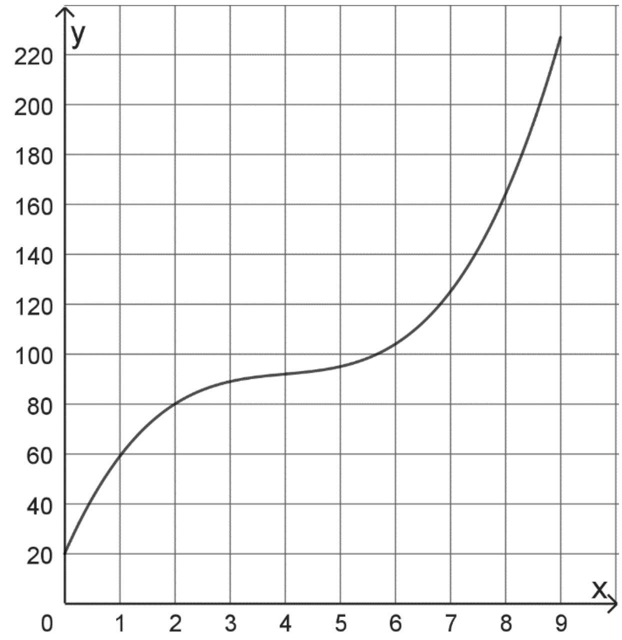

Abbildung 1

1.1.1 Geben Sie mithilfe der Abbildung 1 an: 2 BE

- die Kosten, die bei der Produktion von 3 Kubikmetern der Flüssigkeit entstehen.
- die Produktionsmenge, bei der die Kosten 125 000 Euro betragen.

1.1.2 Der Graph von K besitzt genau einen Wendepunkt. 3 BE

Berechnen Sie dessen Koordinaten.

1.1.3 Interpretieren Sie den Wert von $K'(4)$ im Sachzusammenhang. 3 BE

Die Funktion E mit $E(x) = 23x$ gibt für $0 \le x \le 9$ den Erlös beim Verkauf von x Kubikmetern der Flüssigkeit in Euro an. Für die Gewinnfunktion gilt $G(x) = E(x) - K(x)$. Positive Werte von G werden als Gewinn bezeichnet, negative als Verlust.

1.1.4 Zeigen Sie, dass das Unternehmen keinen Gewinn erzielt, wenn vier Kubikmeter der Flüssigkeit verkauft werden. 2 BE

1.1.5 Zeichnen Sie den Graphen von E in die Abbildung 1 ein. 4 BE

Bestimmen Sie mithilfe der so entstehenden Darstellung den Bereich, in dem die verkaufte Menge der Flüssigkeit liegen muss, damit das Unternehmen einen Gewinn erzielt.

1.1.6 Berechnen Sie, welche Menge der Flüssigkeit verkauft werden muss, damit das Unternehmen den größten Gewinn erzielt. 6 BE

Berechnen Sie diesen Gewinn.

1.2 Gegeben ist die Funktion f mit der Gleichung $f(x) = -e^{x} + 2$ und $x \in \mathbb{R}$.
Der Graph von f ist in der Abbildung 2 für $x \geq -1$ dargestellt.

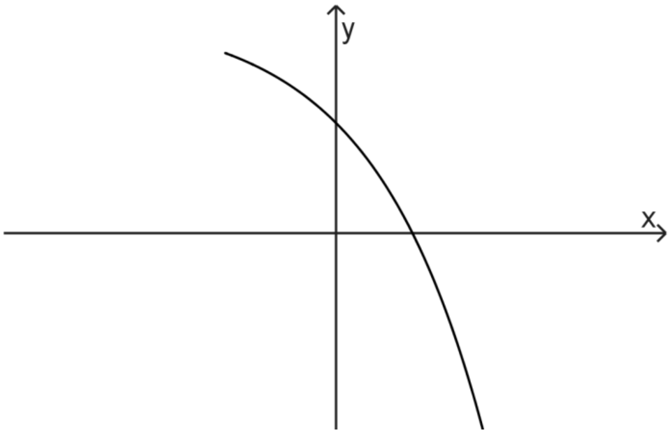

Abbildung 2

1.2.1 Weisen Sie nach, dass $(0|1)$ der Schnittpunkt des Graphen von f mit der y-Achse ist. Berechnen Sie die Nullstelle von f. 3 BE

1.2.2 Begründen Sie ohne Rechnung, dass gilt: $\int_{-2025}^{-2024} f(x)\,dx \approx 2$. 2 BE

Hinweis: Von den Wahlaufgaben 2 und 3 ist **eine** zu bearbeiten.

2 Wahlaufgabe Analytische Geometrie

Gegeben sind das gerade Prisma ABCDEF mit den Eckpunkten $C(0|0|0)$, $D(6|0|5)$, $E(0|8|5)$ und $F(0|0|5)$ sowie der Punkt $L(3|4|5)$ (vgl. Abbildung 1).

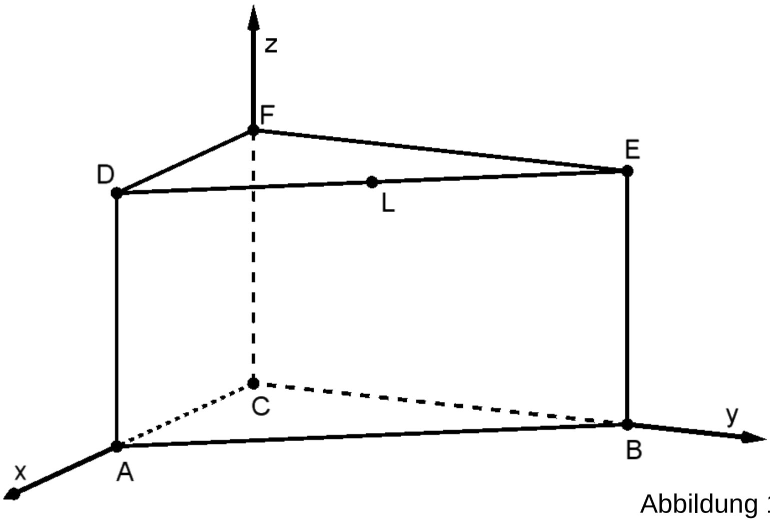

Abbildung 1

2.1 Berechnen Sie den Inhalt der Oberfläche des Prismas. 4 BE

2.2 Geben Sie die besondere Lage des Punktes L auf der Kante $\overline{DE}$ des Prismas an. 1 BE

2.3 Die Ebene W enthält die Punkte L, F und $S(7{,}5|0|0)$ (vgl. Abbildung 2). 4 BE
Bestimmen Sie eine Gleichung von W in Koordinatenform.

Zur Kontrolle: $4x - 3y + 6z = 30$

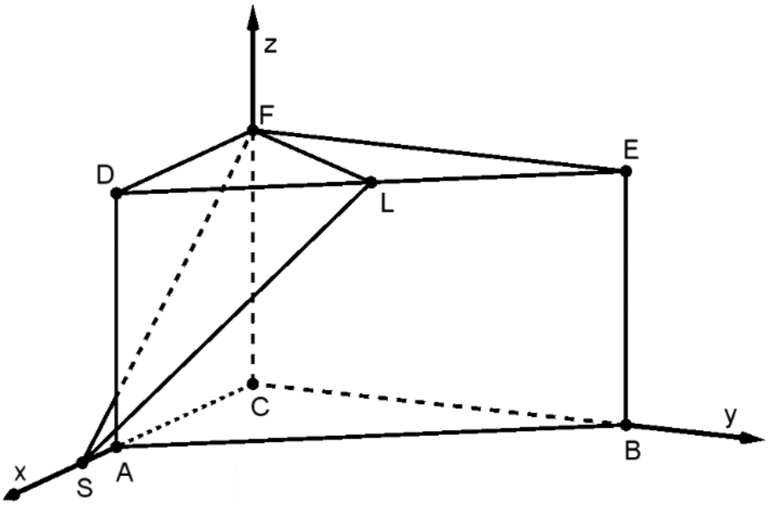

Abbildung 2

2.4 Im Folgenden sind zwei Schritte der Lösung einer Aufgabe angegeben, die im Zusammenhang mit den betrachteten geometrischen Objekten stehen: 2 BE

- $P(6\,|\,0\,|\,r)$ mit $0 \le r \le 5$
- $4 \cdot 6 - 3 \cdot 0 + 6 \cdot r = 30$

Geben Sie eine passende Aufgabenstellung an.

2.5 Anstelle des Punkts S werden nun Punkte $S_k(k\,|\,0\,|\,0)$ mit $k \ge 0$ auf der x-Achse betrachtet. Für jeden Wert von k schneidet die Ebene durch die Punkte L, F und S_k das Prisma ABCDEF in einem Vieleck. 4 BE

Geben Sie die Anzahl der Ecken des Vielecks in Abhängigkeit von k an sowie alle Werte von k, für die das Vieleck zwei Symmetrieachsen besitzt.

3 Wahlaufgabe Analytische Geometrie

Bei Erdarbeiten werden Schuttmulden als Auffang- und Transportbehälter genutzt. Die betrachtete Schuttmulde hat die Form eines geraden Prismas mit fünfeckiger Grundfläche.

Die Ecken der Schuttmulde werden in einem Koordinatensystem durch die Punkte $A(10|0|0)$, $B(10|12|0)$, $C(10|12|7)$, $D(10|0|7)$, $E(10|-4|5)$ und $F(0|0|0)$ sowie G, H, I und J modelliert. Die Fläche ABGF stellt dabei den Boden der Schuttmulde dar. Die Mulde ist oben und links oben offen (vgl. Abbildungen 1 und 2).

Eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht einem Dezimeter in der Realität.

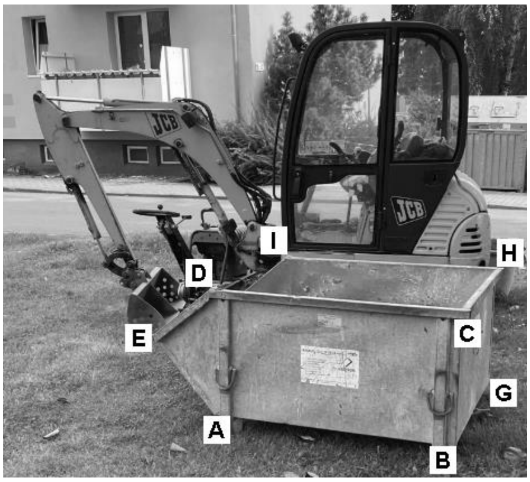

Abbildung 1: Schuttmulde mit Bagger

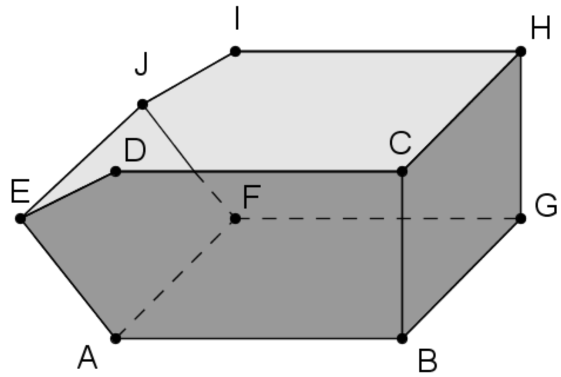

Abbildung 2: Schuttmulde im Modell

3.1 Die Fläche EAFJ liegt in der Ebene mit der Gleichung $5y+4z=0$. **1 BE**

Begründen Sie, dass die Fläche EAFJ senkrecht zur yz-Ebene liegt.

3.2 Ermitteln Sie das Volumen des Prismas ABCDEFGHIJ und geben Sie das Fassungsvermögen der Schuttmulde in Kubikmetern an. **4 BE**

3.3 In der Mulde befindet sich eine gerade, dünne Eisenstange. Das untere Ende der Stange liegt in einer Ecke der Mulde, im Modell ist dies der Punkt F. Das obere Ende lehnt in der Mitte einer gegenüberliegenden Kante an, im Modell im Mittelpunkt der Kante $\overline{BC}$. **6 BE**

Berechnen Sie die Länge dieser Stange in Zentimeter sowie den Neigungswinkel der Stange gegenüber dem Boden der Mulde.

3.4 Eine solche Schuttmulde wird auf einen ebenen horizontalen Untergrund gestellt und als Auffangbehälter für Regenwasser genutzt. Aufgrund der oben offenen Bauweise kann die Schuttmulde nicht vollständig mit Wasser befüllt werden. Durch Ankippen der Mulde wird das Auffangvolumen maximiert (siehe Abbildung 3). 4 BE

Erläutern Sie, wie die Größe des zugehörigen Neigungswinkels der Bodenfläche gegenüber dem Untergrund berechnet werden kann.

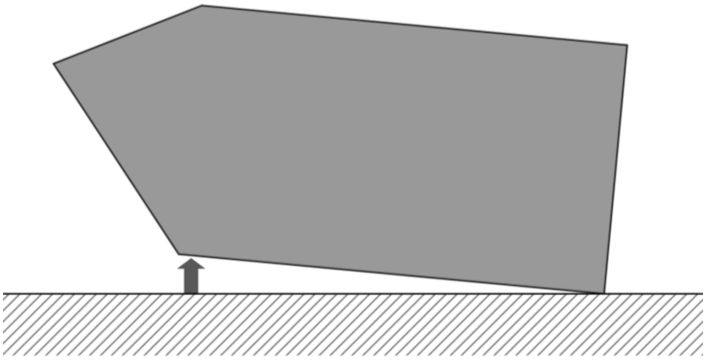

Abbildung 3: Seitenansicht des Modells der Mulde im angekippten Zustand

Hinweis: Von den Wahlaufgaben 4 und 5 ist **eine** zu bearbeiten.

4 Wahlaufgabe Stochastik

In einem Land, in dem 80 % der Erwachsenen einen Führerschein besitzen, werden 200 Erwachsene zufällig ausgewählt. Es soll angenommen werden, dass dabei die Anzahl der ausgewählten Erwachsenen, die einen Führerschein besitzen, binomialverteilt ist.

4.1 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Anzahl der ausgewählten Erwachsenen, die einen Führerschein besitzen, vom Erwartungswert für diese Anzahl um höchstens 8 abweicht. 3 BE

4.2 Ermitteln Sie, wie groß die Anzahl der ausgewählten Erwachsenen mindestens sein müsste, damit von diesen mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90 % mehr als 160 einen Führerschein besitzen. 4 BE

4.3 In einer bestimmten Region des betrachteten Landes werden alle Fahrprüfungen eines Jahres auf einen möglichen Zusammenhang zwischen dem Alter eines Prüflings und dem Bestehen der Prüfung hin untersucht. Von insgesamt 13879 Prüflingen waren 17,9 % zum Zeitpunkt der Prüfung mindestens 30 Jahre alt. 80,0 % aller Prüflinge haben die Prüfung bestanden.
Ein Prüfling wird zufällig ausgewählt. Betrachtet werden die folgenden Ereignisse:

A: „Der Prüfling war zum Zeitpunkt der Prüfung mindestens 30 Jahre alt."

B: „Der Prüfling hat die Prüfung bestanden."

Weiterhin gilt $P(A \cap B) = 0{,}161$.

4.3.1 Vervollständigen Sie für diesen Sachverhalt die Vierfeldertafel in der Abbildung. 2 BE

	A	$\overline{A}$	
B			0,8
$\overline{B}$			
	0,179		1

4.3.2 Bestimmen Sie den Wert des Terms $\frac{1-P(A \cup B)}{P(A)}$ und deuten Sie das Ergebnis im Sachzusammenhang. 3 BE

4.3.3 Untersuchen Sie, ob die Ereignisse A und B stochastisch unabhängig sind. 3 BE

5 Wahlaufgabe Stochastik

In einem Bundesland wird die Bevölkerungsgruppe derjenigen, die im Jahr 2000 geboren wurden, im Hinblick auf Schulabschlüsse untersucht. In dieser Bevölkerungsgruppe beträgt der Anteil der Personen mit Abitur 36 %. Unter den Personen mit Abitur sind 54 % weiblich, unter allen Personen ohne Abitur ist der Anteil derjenigen, die nicht weiblich sind, etwa 53 %.

5.1 Stellen Sie den Sachzusammenhang in einem beschrifteten Baumdiagramm dar. 3 BE

5.2 Ermitteln Sie den Anteil der nicht weiblichen Personen in der betrachteten Bevölkerungsgruppe. 2 BE

5.3 Bestimmen Sie für die weiblichen Personen den Anteil derjenigen mit Abitur. 3 BE

Für eine Online-Befragung werden aus der betrachteten Bevölkerungsgruppe 100 Personen zufällig ausgewählt. Es soll davon ausgegangen werden, dass unter den ausgewählten Personen die Anzahl derjenigen mit Abitur binomialverteilt ist.

5.4 Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Anzahl der ausgewählten Personen mit Abitur kleiner als der Erwartungswert dieser Anzahl ist. 3 BE

5.5 Aus der gesamten Bevölkerungsgruppe derjenigen, die im Jahr 2000 geboren wurden, werden n Personen zufällig ausgewählt. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich darunter mehr als 20 mit Abitur befinden, ist größer als 0 % und kleiner als 10 %. 4 BE

Ermitteln Sie alle Werte, die für n infrage kommen.