# Mecklenburg-Vorpommern

# Musterabitur

## Mathematik (WTR)

**Grundkurs**

**Hinweise für die Lehrkraft**
**zur Durchführung, Korrektur und Bewertung**
**(nicht für die Hand des Prüflings)**

# Hinweise für die Lehrkraft

**Aufgaben-bearbeitung**:

Die Prüfungsarbeit besteht aus den Teilen A und B.

Der Prüfling erhält zunächst die Aufgaben für den Teil A mit den hilfsmittelfreien Aufgaben. Dieser beinhaltet
- drei Pflichtaufgaben (Aufgaben 1, 2 und 3),
- drei Wahlaufgaben aus der Aufgabengruppe 1 (Aufgaben 4, 5, 6),
- drei Wahlaufgaben aus der Aufgabengruppe 2 (Aufgaben 7, 8, 9).

Der Prüfling bearbeitet die drei Pflichtaufgaben und jeweils eine Wahlaufgabe aus jeder Aufgabengruppe.

Nach Abgabe der Aufgaben des Teils A erhält der Prüfling die Aufgaben des Teils B sowie die dafür vorgesehenen Hilfsmittel. Der Prüfungsteil B beinhaltet
- eine Pflichtaufgabe Analysis (Aufgabe 1),
- zwei Wahlaufgaben Geometrie (Aufgaben 2 und 3) sowie
- zwei Wahlaufgaben Stochastik (Aufgaben 4 und 5).

Der Prüfling bearbeitet die Pflichtaufgabe Analysis, eine Wahlaufgabe Geometrie und eine Wahlaufgabe Stochastik.

**Bearbeitungszeit:**

Die Bearbeitungszeit für die Prüfungsteile A und B beträgt einschließlich Auswahlzeit 285 Minuten. Der Prüfling entscheidet selbstständig über den Zeitraum der Bearbeitung des Teils A, dieser Zeitraum darf jedoch maximal 100 Minuten betragen.

**Hilfsmittel:**

Dem Prüfling stehen folgende Hilfsmittel zur Verfügung:
- eine an der Schule eingeführte Formelsammlung (bzw. Tafelwerk),
- ein an der Schule zugelassener wissenschaftlicher Taschenrechner (WTR), der nicht programmierbar und nicht graphikfähig ist und nicht über Möglichkeiten der numerischen Differentiation oder Integration oder des automatischen Lösens von Gleichungen verfügt,
- Zeichengeräte,
- ein Wörterbuch der deutschen Rechtschreibung in gedruckter oder digitaler Form,
- ein zweisprachiges Wörterbuch in gedruckter oder digitaler Form für Prüflinge mit nichtdeutscher Herkunftssprache.

Für die Aufgaben des Teils A sind Formelsammlung (bzw. Tafelwerk) und WTR nicht zulässig.

**Bewertung:**

Die Lösungen sind in einer sprachlich korrekten, mathematisch exakten und äußerlich einwandfreien Form darzustellen. In der Niederschrift müssen die Lösungswege nachvollziehbar sein.

Im Teil A sind je Aufgabe 5 Bewertungseinheiten (BE) erreichbar, im Teil B in der Pflichtaufgabe 25 BE und in den Wahlaufgaben jeweils 15 BE. Bearbeitet ein Prüfling mehr Wahlaufgaben als gefordert, so wird jeweils die Aufgabe gewertet, welche die höchste Anzahl an BE erbringt.

Maximal zwei Bewertungseinheiten können zusätzlich vergeben werden bei guter Notation und Darstellung sowie eleganten, kreativen und rationellen Lösungswegen, maximal zwei Notenpunkte können bei mehrfachen Formverstößen abgezogen werden. Allein durch die Bearbeitung einer weiteren Wahlaufgabe im Teil A ist keine zusätzliche Bewertungseinheit erreichbar.

## Bewertungstabelle – Grundkurs, Teile A und B

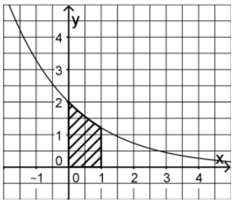
| Bewertungseinheiten | Notenpunkte |
|---|---|
| 76 bis 80 | 15 |
| 72 bis 75 | 14 |
| 68 bis 71 | 13 |
| 64 bis 67 | 12 |
| 60 bis 63 | 11 |
| 56 bis 59 | 10 |
| 52 bis 55 | 09 |
| 48 bis 51 | 08 |
| 44 bis 47 | 07 |
| 40 bis 43 | 06 |
| 36 bis 39 | 05 |
| 32 bis 35 | 04 |
| 27 bis 31 | 03 |
| 22 bis 26 | 02 |
| 16 bis 21 | 01 |
| 0 bis 15 | 00 |

Die Verteilung der Bewertungseinheiten auf die Teilaufgaben ist verbindlich.

Der Erwartungshorizont stellt für jede Teilaufgabe eine mögliche Lösung dar. Nicht dargestellte korrekte Lösungen sind als gleichwertig zu akzeptieren.

# Teil A Erwartungshorizont

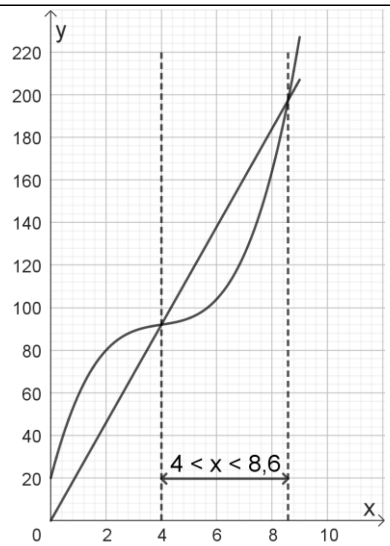
| Aufgabe | Pflichtaufgaben | mögliche BE | erteilte BE |
|---|---|---|---|
| 1.1 | $f(x)=0 \Leftrightarrow x^2 \cdot (x+2)=0 \Leftrightarrow x=-2 \vee x=0$ | 2 | |
| 1.2 | $\int_{-2}^{0}\left(x^3+2x^2\right)dx=\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3\right]_{-2}^{0}=\frac{4}{3}$ | 3 | |
| 2.1 | $\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix},\ \overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}3\\0\\6\end{pmatrix},\ \overrightarrow{AB}\neq r\cdot\overrightarrow{AC}$ für alle $r\in IR$<br>$\vec{x}=\begin{pmatrix}-2\\1\\-2\end{pmatrix}+s\cdot\overrightarrow{AB}+t\cdot\overrightarrow{AC},\ s,t\in IR$ | 3 | |
| 2.2 | $\overrightarrow{AB}\circ\overrightarrow{BD}=0\Leftrightarrow 3\cdot(d-1)+1\cdot(-1)+1\cdot 5=0\Leftrightarrow d=-\frac{1}{3}$ | 2 | |
| 3.1 | $0{,}85\cdot 0{,}02=0{,}017$ | 2 | |
| 3.2 | Der Term gibt die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass eine zufällige ausgewählte Person, bei der der Test positiv ist, tatsächlich Heuschupfen hat. | 3 | |
| | **Summe:** | **15** | |

<table>
<tr><th>Aufgabe</th><th>Wahlaufgaben – Aufgabengruppe 1</th><th>mögliche BE</th><th>erteilte BE</th></tr>
<tr><td>4.1</td><td>$f(0)=2$, $f'(0)=-1$<br>Damit: $y=-x+2$</td><td>2</td><td></td></tr>
<tr><td>4.2</td><td>Z. B.<br>

Term: $\int_0^1 f(x)\,dx$</td><td>3</td><td></td></tr>
<tr><td>5.1</td><td>$\overline{AC}=\overline{OA}=\sqrt{1+1+1}=\sqrt{3}$</td><td>2</td><td></td></tr>
<tr><td>5.2</td><td>Da $\overrightarrow{OC}=2\cdot\overrightarrow{OA}$ gilt, liegen A, C und der Koordinatenursprung auf einer Gerade. Wegen $\overrightarrow{OB}\neq\lambda\cdot\overrightarrow{OA}$ für alle $\lambda\in\mathbb{R}$, enthält diese Gerade nicht den Punkt B.</td><td>3</td><td></td></tr>
<tr><td>6.1</td><td>$(6;W)$</td><td>1</td><td></td></tr>
<tr><td>6.2</td><td>Zu dem Ereignis $\overline{B}$ gehören die vier Augenzahlen 1, 2, 3 und 4 der sechs möglichen Augenzahlen des Würfels.<br>Daraus ergibt sich $P(\overline{B})=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$.<br><br>$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{12}$
<table>
<tr><th></th><th>$A$</th><th>$\overline{A}$</th><th></th></tr>
<tr><td>$B$</td><td>$\frac{1}{12}$</td><td>$\frac{1}{4}$</td><td>$\frac{1}{3}$</td></tr>
<tr><td>$\overline{B}$</td><td>$\frac{1}{6}$</td><td>$\frac{1}{2}$</td><td>$\frac{2}{3}$</td></tr>
<tr><td></td><td>$\frac{1}{4}$</td><td>$\frac{3}{4}$</td><td>1</td></tr>
</table></td><td>4</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>Summe:</td><td>5</td><td></td></tr>
</table>

| Aufgabe | Wahlaufgaben – Aufgabengruppe 2 | mögliche BE | erteilte BE |
|---|---|---|---|
| 7.1 | $y = 4x - 8$ | 1 | |
| 7.2 | Gleichung der Normale: $y = mx + n$<br>$f(u) = \frac{1}{2}u^2$; $m = -\frac{1}{f'(u)} = -\frac{1}{u}$<br>$\frac{1}{2}u^2 = -\frac{1}{u} \cdot u + n \Leftrightarrow n = \frac{1}{2}u^2 + 1$ | 4 | |
| 8.1 | $\left\lvert\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\rvert = 3$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$<br>Damit: $(-4 \mid 6 \mid 6)$ | 2 | |
| 8.2 | Das Dreieck ABC ist in C rechtwinklig. C liegt also auf dem Thaleskreis über $\overline{AB}$, d. h. der Mittelpunkt $M(0 \mid 2 \mid 1)$ von $\overline{AB}$ hat von A, B und C den gleichen Abstand. Alle weiteren Punkte mit dieser Eigenschaft liegen auf der Lotgerade zur yz-Ebene durch M, beispielsweise der Punkt $(1 \mid 2 \mid 1)$. | 3 | |
| 9.1 | $P(X = 3) = \binom{5}{3} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3$ | 2 | |
| 9.2 | Mit $P(Y = 15) = P(Y = 12)$ ergibt sich:<br>$P(Y = 14) = P(Y \le 15) - P(Y = 15) - P(Y \le 13)$<br>$\approx 0{,}78 - 0{,}13 - 0{,}5 = 0{,}15$ | 3 | |
| | **Summe:** | **5** | |

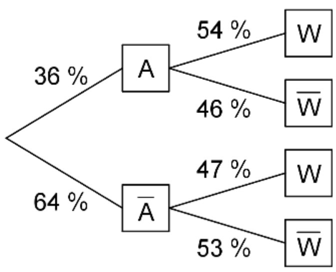
# Teil B Erwartungshorizont

| Aufgabe | Analysis – Pflichtaufgabe | mögliche BE | erteilte BE |
|---|---|---|---|
| 1.1.1 | Kosten: 90 000 Euro<br>Produktionsmenge: 7 Kubikmeter | 2 | |
| 1.1.2 | $f''(x)=6x-24$<br>$f''(x)=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=4, \quad f(4)=92$ | 3 | |
| 1.1.3 | $K'(x)=3x^2-24x+50$<br>$K'(4)=48-96+50=2$<br>Die momentane Änderungsrate der Kostenfunktion für $x=4$ beträgt 2, d. h. die Kosten steigen für kleine Änderungen der Produktion um 2 EUR pro mehr produziertem Kubikmeter der Flüssigkeit an. | 3 | |
| 1.1.4 | Gewinnfunktion: $G(x)=E(x)-K(x)$<br>$G(4)=E(4)-K(4)=23\cdot 4-92=0$ | 2 | |
| 1.1.5 |  | 4 | |
| 1.1.6 | $G(x)=-x^3+12x^2-27x-20$<br>$G'(x)=-3x^2+24x-27;$<br>$G'(x)=0 \quad \Rightarrow \quad 0=x^2-8x+9 \quad \Leftrightarrow \quad x\approx 1{,}35 \vee x\approx 6{,}65$<br>$x\approx 6{,}65$ liegt im betreffenden Intervall; $G(6{,}65)\approx 37{,}04$<br>$G''(6{,}65)=-6\cdot 6{,}65+24\approx -16<0 \quad \Rightarrow \quad$ Maximum<br>Für 6,65 Kubikmeter verkaufter Flüssigkeit erzielt das Unternehmen mit 37 040 € den größten Gewinn. | 6 | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1.2.1 | $f(0) = -e^0 + 2 = -1 + 2 = 1$<br>$0 = -e^x + 2 \Leftrightarrow x = \ln 2$ | 3 | |
| 1.2.2 | Der Graph von f nähert sich für $x \to -\infty$ asymptotisch der Gerade $y = 2$. Damit kann der Wert des Integrals näherungsweise als Inhalt eines Rechteckes mit der Breite 1 und der Höhe 2 beschrieben werden. | 2 | |
| | **Summe:** | **25** | |

| Aufgabe | Analytische Geometrie – Wahlaufgaben | mögliche BE | erteilte BE |
|---|---|---|---|
| 2.1 | Oberflächeninhalt: $6 \cdot 8 + 5 \cdot \left(6 + 8 + \sqrt{6^2 + 8^2}\right) = 168$ | 4 | |
| 2.2 | P ist der Mittelpunkt der Strecke $\overline{DE}$. | 1 | |
| 2.3 | Mit $W: ax + by + cz = 30$ ergibt sich aus $F, M, S \in W$ das Gleichungssystem<br>I $5c = 30$ II $3a + 4b + 5c = 30$ III $7{,}5a = 30$.<br>Aus I und III folgt $c = 6$ bzw. $a = 4$.<br>Aus II ergibt sich $12 + 4b + 30 = 30$ und schließlich $b = -3$. | 4 | |
| 2.4 | Bestimmen Sie die Koordinaten des Punkts der Strecke $\overline{AD}$, der in der Ebene W liegt. | 2 | |
| 2.5 | $0 \le k < 6$: vier Ecken<br>$k \ge 6$: drei Ecken<br>zwei Symmetrieachsen: $k = 0$ | 4 | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 3.1 | Die Gleichung der Ebene enthält keine x-Komponente. | 1 | |
| 3.2 | $V = A_G \cdot h = \left( \left\|\overrightarrow{AB}\right\| \cdot \left\|\overrightarrow{BC}\right\| + \frac{\left\|\overrightarrow{AD}\right\| \cdot \left\|y_E\right\|}{2} \right) \cdot \left\|\overrightarrow{AF}\right\|$<br>$V = \left(12 \cdot 7 + \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 4\right) \cdot 10 = 980$<br>Das Fassungsvermögen der Schuttmulde beträgt ca. $1\text{m}^3$. | 4 | |
| 3.3 | $M_{BC}\left(10 \middle\| 12 \middle\| 3{,}5\right)$, $\left\|\overrightarrow{FM_{BC}}\right\| = \frac{5}{2}\sqrt{41} \approx 16$<br>$16\,\text{dm} = 160\,\text{cm}$<br>$\cos\beta = \frac{\overrightarrow{FM_{BC}} \circ \overrightarrow{e_z}}{\left\|\overrightarrow{FM_{BC}}\right\| \cdot \left\|\overrightarrow{e_z}\right\|} = \frac{\begin{pmatrix} 10 \\ 12 \\ 3{,}5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{\frac{5}{2}\sqrt{41}} \Rightarrow \beta \approx 77°$<br>Neigungswinkel $\delta \approx 13°$ | 6 | |
| 3.4 | Die Schuttmulde muss so angekippt werden, dass im Modell die Gerade durch die Punkte E und C parallel zur y-Achse verläuft. Man bestimmt den Winkel $\alpha$, den die Gerade durch die Punkte E und C mit der Gerade durch die Punkte A und B einschließt. Um diesen Winkel $\alpha$ muss die Schuttmulde angekippt werden. | 4 | |
| | **Summe:** | **15** | |

<table>
<tr><th>Aufgabe</th><th>Stochastik – Wahlaufgaben</th><th>mögliche BE</th><th>erteilte BE</th></tr>
<tr><td>4.1</td><td>X: Anzahl der ausgewählten Erwachsenen, die einen Führerschein besitzen<br>$200\cdot 0{,}8=160$<br>$P_{0,8}^{200}\left(152\le X\le 168\right)\approx 86{,}8\%$</td><td>3</td><td></td></tr>
<tr><td>4.2</td><td>$P_{0,8}^{209}\left(X>160\right)\approx 87{,}57\%$, $P_{0,8}^{210}\left(X>160\right)\approx 90{,}04\%$<br>Es müssten mindestens 210 Erwachsene ausgewählt werden.</td><td>4</td><td></td></tr>
<tr><td>4.3.1</td><td><table><tr><td></td><td>$A$</td><td>$\overline{A}$</td><td></td></tr><tr><td>$B$</td><td>0,161</td><td>0,639</td><td>0,8</td></tr><tr><td>$\overline{B}$</td><td>0,018</td><td>0,182</td><td>0,2</td></tr><tr><td></td><td>0,179</td><td>0,821</td><td>1</td></tr></table></td><td>2</td><td></td></tr>
<tr><td>4.3.2</td><td>$1-P\left(A\cup B\right)=P\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)=0{,}182$<br>Etwa 18 % der Prüflinge waren jünger als 30 Jahre und haben die Prüfung nicht bestanden.</td><td>3</td><td></td></tr>
<tr><td>4.3.3</td><td>$P_A\left(B\right)=\frac{0{,}161}{0{,}179}\approx 0{,}9;\quad P\left(B\right)=0{,}8$<br>Aufgrund der Ungleichheit der beiden Wahrscheinlichkeiten sind A und B nicht stochastisch unabhängig.</td><td>3</td><td></td></tr>
<tr><td>5.1</td><td>

A: „Eine Person hat Abitur.“<br>W: „Eine Person ist weiblich.“</td><td>3</td><td></td></tr>
<tr><td>5.2</td><td>$0{,}36\cdot 0{,}46+0{,}64\cdot 0{,}53\approx 0{,}505$<br>Der Anteil der nicht weiblichen Personen in der betrachteten Bevölkerungsgruppe beträgt 50 %.</td><td>2</td><td></td></tr>
<tr><td>5.3</td><td>$P_W\left(A\right)=\frac{0{,}36\cdot 0{,}54}{0{,}36\cdot 0{,}54+0{,}64\cdot 0{,}47}\approx 0{,}393$<br>Unter den weiblichen Personen haben 39 % Abitur.</td><td>3</td><td></td></tr>
</table>

| | | | |
|---|---|---|---|
| 5.4 | Erwartungswert: $36\,\% \cdot 100 = 36$<br>$P_{0,36}^{100}(X < 36) \approx 46\,\%$ | 3 | |
| 5.5 | Mit $P_{0,36}^{45}(X > 20) \approx 9\,\%$ und $P_{0,36}^{46}(X > 20) \approx 11\%$<br>ergibt sich $21 \le n \le 45$. | 4 | |
| | **Summe:** | **15** | |