Mecklenburg-Vorpommern

Nachname, Vorname des Prüflings

Musterabitur

Mathematik (WTR)

Leistungskurs

Prüfungsteil B – komplexe Aufgaben

Hinweise für den Prüfling

Aufgaben-bearbeitung:

Tragen Sie zuerst auf dem Deckblatt Ihren Nachnamen und Vornamen ein.

Der Prüfungsteil B beinhaltet

- eine Pflichtaufgabe Analysis (Aufgabe 1),
- zwei Wahlaufgaben Geometrie (Aufgaben 2 und 3) sowie
- zwei Wahlaufgaben Stochastik (Aufgaben 4 und 5).

Bearbeiten Sie die Pflichtaufgabe Analysis, eine Wahlaufgabe Geometrie und eine Wahlaufgabe Stochastik.

Sofern ein entsprechender Hinweis in einer Teilaufgabe gegeben wird, sollen graphische Darstellungen im vorliegenden Aufgabendokument angefertigt werden, andernfalls verwenden Sie bitte bereitgestelltes Papier bzw. Millimeterpapier. Geben Sie auf der Reinschrift Ihren Namen sowie die bearbeiteten Wahlaufgaben an und nummerieren Sie die Seiten Ihrer Arbeit fortlaufend.

Bearbeitungszeit:

Die Bearbeitungszeit für die Prüfungsteile A und B beträgt einschließlich Auswahlzeit 330 Minuten.

Nach Abgabe des Prüfungsteils A steht Ihnen der verbleibende Zeitraum für die Bearbeitung dieses Prüfungsteils B zur Verfügung.

Hilfsmittel:

Folgende Hilfsmittel stehen zur Verfügung:

- eine an der Schule eingeführte Formelsammlung (bzw. Tafelwerk),
- ein an der Schule zugelassener wissenschaftlicher Taschenrechner (WTR), der nicht programmierbar und nicht graphikfähig ist und nicht über Möglichkeiten der numerischen Differentiation oder Integration oder des automatischen Lösens von Gleichungen verfügt,
- Zeichengeräte,
- ein Wörterbuch der deutschen Rechtschreibung in gedruckter oder digitaler Form,
- ein zweisprachiges Wörterbuch in gedruckter oder digitaler Form für Prüflinge mit nichtdeutscher Herkunftssprache.

Bewertung:

Die Lösungen sind in einer sprachlich korrekten, mathematisch exakten und äußerlich einwandfreien Form darzustellen. In der Niederschrift müssen die Lösungswege nachvollziehbar sein.

Im Teil A sind je Aufgabe 5 Bewertungseinheiten (BE) erreichbar, im Teil B in der Pflichtaufgabe 30 BE und in den Wahlaufgaben jeweils 20 BE. Bearbeitet ein Prüfling mehr Wahlaufgaben als gefordert, so werden die Aufgaben gewertet, welche die höchsten Punktzahlen erbringen.

Maximal zwei Bewertungseinheiten können zusätzlich vergeben werden bei guter Notation und Darstellung sowie eleganten, kreativen und rationellen Lösungswegen. Maximal zwei Notenpunkte können bei mehrfachen Formverstößen abgezogen werden.

1 Pflichtaufgabe Analysis

Abbildung 1 zeigt den Graphen G_f einer ganzrationalen Funktion f dritten Grades mit Definitionsmenge $\mathbb{R}$. G_f schneidet die x-Achse bei $x = 0$, $x = 5$ und $x = 10$ und verläuft durch den Punkt $(1|2)$.

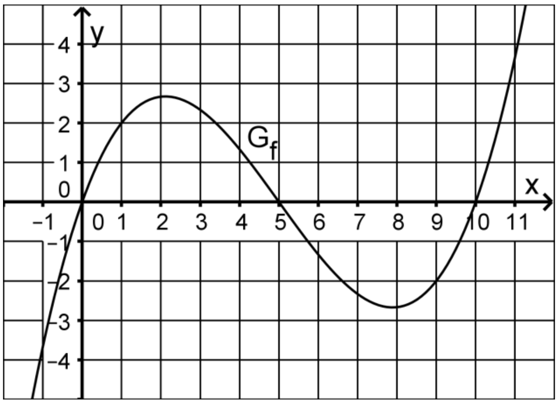


Abbildung 1

1.1 Ermitteln Sie einen Funktionsterm von f. 4 BE

zur Kontrolle: $f(x) = \frac{1}{18} \cdot (x^3 - 15x^2 + 50x)$

1.2 Zeigen Sie, dass G_f im Punkt $W(5|0)$ einen Wendepunkt besitzt, und ermitteln Sie eine Gleichung der Tangente an G_f im Punkt W. 6 BE

1.3 G_f geht aus dem Graphen der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion g mit der Gleichung $g(x) = \frac{1}{18} \cdot (x^3 - 25x)$ durch eine Verschiebung in positive x-Richtung hervor. 4 BE

Geben Sie an, um wie viel der Graph von g dazu verschoben werden muss.

Begründen Sie mithilfe der Funktion g, dass der Graph von f symmetrisch bezüglich seines Wendepunkts ist.

1.4 An einem bestimmten Tag entsteht ein Stau an einer Autobahnbaustelle. Für diesen Tag kann die momentane Änderungsrate der Staulänge um 06:00 Uhr für die folgenden 10 Stunden mithilfe der Funktion f beschrieben werden. Dabei gibt x die nach 06:00 Uhr vergangene Zeit in h (Stunden) und f(x) die momentane Änderungsrate der Staulänge in $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ (Kilometer pro Stunde) an. 2 BE

Ermitteln Sie den Zeitpunkt, zu dem die Staulänge maximal ist. Begründen Sie Ihre Angabe.

1.5 Im Folgenden wird die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion F_1 mit $F_1(x) = \int_1^x f(t)\,dt$ betrachtet.

1.5.1 F_1 hat für $0 \le x \le 10$ zwei ganzzahlige Nullstellen. Geben Sie diese an und begründen Sie Ihre Angabe. 3 BE

1.5.2 Begründen Sie mithilfe von Abbildung 1, dass F_1 mindestens eine weitere positive Nullstelle hat. 2 BE

1.6 Für $0 \leq x \leq 5$ gilt, dass der Graph von f und der Graph einer trigonometrischen Funktion h

- die gleichen Schnittpunkte mit der x-Achse besitzen;
- beide nicht unterhalb der x-Achse verlaufen;
- jeweils mit der x-Achse eine Fläche des Inhalts $\frac{625}{72}$ einschließen.

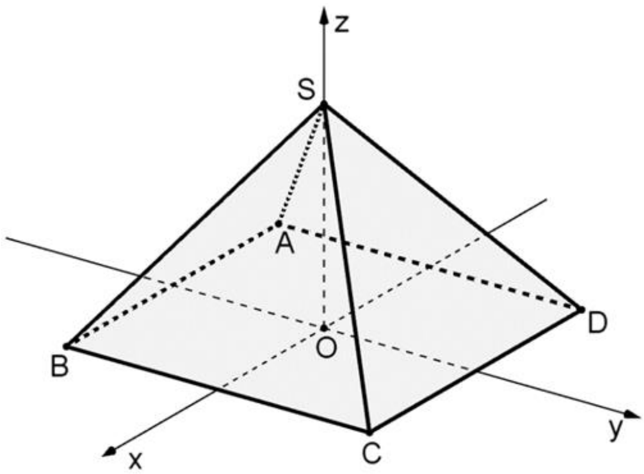
1.6.1 Bestimmen Sie einen Term einer solchen Funktion h. 6 BE

1.6.2 Begründen Sie, dass die Graphen von f und h für $0 < x < 5$ mindestens einen gemeinsamen Punkt haben. 3 BE

Hinweis: Von den Wahlaufgaben 2 und 3 ist **eine** zu bearbeiten.

2 Wahlaufgabe Analytische Geometrie

Abbildung 1 zeigt die Pyramide ABCDS mit den Eckpunkten $A(-3|-3|0)$, $B(3|-3|0)$, $C(3|3|0)$, $D(-3|3|0)$ und $S(0|0|4)$ sowie den Punkt $O(0|0|0)$, der in der quadratischen Grundfläche der Pyramide liegt. Die Seitenfläche CDS der Pyramide liegt in der Ebene E.



2.1 Berechnen Sie den Inhalt der Oberfläche der Pyramide. 4 BE

2.2 Genau eine der folgenden Gleichungen (1) bis (3) beschreibt eine Symmetrieebene der Pyramide. 3 BE

Geben Sie diese Gleichung an und begründen Sie für eine der anderen Gleichungen, dass die durch sie beschriebene Ebene keine Symmetrieebene der Pyramide ist.

(1) $x-z=0$ (2) $x+y+z=4$ (3) $x+y=0$

2.3 Ermitteln Sie eine Gleichung von E in Koordinatenform. 3 BE

zur Kontrolle: $4y+3z=12$

2.4 Es gibt einen Punkt $P(0|0|p)$, der im Innern der Pyramide liegt und von allen vier Seitenflächen sowie der Grundfläche der Pyramide den gleichen Abstand hat. Mithilfe des folgenden Gleichungssystems lässt sich der Wert von p bestimmen: 5 BE

I $\overrightarrow{OQ}=\begin{pmatrix}0\\0\\p\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}0\\4\\3\end{pmatrix}$

II $4\cdot 4t+3\cdot(p+3t)=12$

III $\left|\overrightarrow{PQ}\right|=p$

Erläutern Sie die Überlegungen im geometrischen Zusammenhang, die diesem Vorgehen zur Bestimmung des Werts von p zugrunde liegen.

2.5 Die Ebene E gehört zur Schar der Ebenen $E_k:\ 4k\cdot x+4\sqrt{1-k^2}\cdot y+3\cdot z=12$ mit $k\in[-1;1]$. Die Seitenfläche ADS der Pyramide liegt in der Ebene E_{-1} der Schar, die Seitenfläche BCS in der Ebene E_1. 5 BE

Weisen Sie nach, dass die Größe des Winkels, unter dem die Gerade OS die Ebene E_k schneidet, unabhängig von k ist, und bestimmen Sie diese Größe.

3 Wahlaufgabe Analytische Geometrie

Die Abbildung 1 zeigt das sogenannte Saarpolygon, ein im Inneren begehbares Denkmal zur Erinnerung an den stillgelegten Kohlebergbau im Saarland. Das Saarpolygon kann in einem Koordinatensystem modellhaft durch den Streckenzug dargestellt werden, der aus den drei Strecken $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ und $\overline{CD}$ mit $A(11|11|0)$, $B(-11|11|28)$, $C(11|-11|28)$ und $D(-11|-11|0)$ besteht (vgl. Abbildung 2). A, B, C und D sind Eckpunkte eines Quaders. Eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht einem Meter in der Wirklichkeit.

Abbildung 1

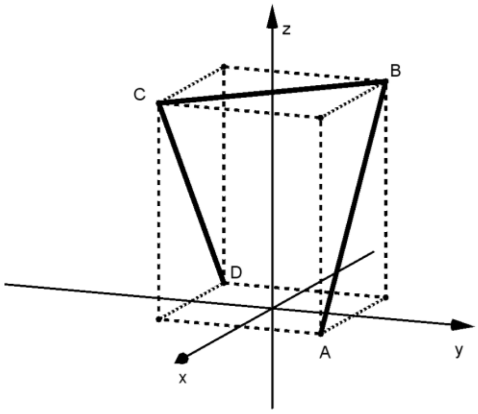


Abbildung 2

3.1 Begründen Sie, dass die Punkte B und C symmetrisch bezüglich der z-Achse liegen. 2 BE

3.2 Berechnen Sie die Länge des Streckenzugs in der Wirklichkeit. 3 BE

3.3 Die Ebene E enthält die Punkte A, B und C, die Ebene F die Punkte B, C und D.

3.3.1 Bestimmen Sie eine Gleichung von E in Koordinatenform. 4 BE

zur Kontrolle: $14x + 14y + 11z = 308$

3.3.2 Berechnen Sie die Größe φ des Winkels, unter dem E die xy-Ebene schneidet. 3 BE

3.4 Für ein Museum soll vom Saarpolygon ein kleines maßstabsgetreues Modell angefertigt werden, das in einen quaderförmigen Körper aus Glas eingeschlossen ist. Dieser Quader soll 1,4 m hoch sein und in demselben Koordinatensystem modelliert werden. 2 BE

Geben Sie das Verhältnis zwischen dem Volumen des Glasquaders im Modell und dem des Quaders aus Abbildung 2 an. Begründen Sie Ihre Angabe.

3.5 Das Saarpolygon wird mit verschiedenen Blickrichtungen betrachtet. Die Abbildung 3 stellt das Saarpolygon für eine Blickrichtung schematisch dar. 2 BE

Abbildung 3

Geben Sie einen möglichen Vektor an, der die zugehörige Blickrichtung beschreibt.

3.6 Der Punkt $P(0|0|h)$ liegt innerhalb des Quaders und hat von den drei Strecken $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ und $\overline{CD}$ den gleichen Abstand. Das folgende Gleichungssystem liefert den Wert von h: 4 BE

$$\text{I}\quad \overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix} 11 \\ 11 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -22 \\ 0 \\ 28 \end{pmatrix},\ t \in [0;1] \qquad \text{II}\quad \overrightarrow{PQ} \circ \overrightarrow{AB} = 0 \qquad \text{III}\quad \left|\overline{PQ}\right| = 28 - h$$

Erläutern Sie die Überlegungen, die diesem Vorgehen zur Bestimmung des Werts von h zugrunde liegen.

Hinweis: Von den Wahlaufgaben 4 und 5 ist **eine** zu bearbeiten.

4 Wahlaufgabe Stochastik

In Deutschland liegt bei 1 % der Bevölkerung eine Glutenunverträglichkeit vor. Die betroffenen Personen reagieren auf den Verzehr von bestimmten Getreidesorten mit körperlichen Beschwerden. Ob eine Glutenunverträglichkeit vorliegt oder nicht, kann mithilfe eines Schnelltests diagnostiziert werden. Zeigt das Ergebnis dieses Tests die Glutenunverträglichkeit an, so bezeichnet man es als positiv.

4.1 Liegt bei einer Person eine Glutenunverträglichkeit vor, so ist das Testergebnis mit einer Wahrscheinlichkeit von 98 % positiv. Liegt bei einer Person keine Glutenunverträglichkeit vor, so beträgt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Testergebnis dennoch positiv ist, 4 %.

Bei einer Person, die aus der Bevölkerung Deutschlands zufällig ausgewählt wurde, wird der Test durchgeführt.

4.1.1 Erstellen Sie zu dem beschriebenen Sachzusammenhang ein beschriftetes Baumdiagramm. 3 BE

4.1.2 Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei einer Person eine Glutenunverträglichkeit vorliegt und das Testergebnis positiv ist. 1 BE

4.1.3 Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Glutenunverträglichkeit vorliegt, wenn das Testergebnis positiv ist. 3 BE

4.2 Im Rahmen einer Studie werden aus der Bevölkerung Deutschlands 20 000 Personen zufällig ausgewählt. Die Zufallsgröße X gibt die Anzahl der ausgewählten Personen an, bei denen eine Glutenunverträglichkeit vorliegt. 4 BE

Berechnen Sie in einem geeigneten Modell die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Anzahl der ausgewählten Personen, bei denen eine Glutenunverträglichkeit vorliegt, um mehr als 10 % vom Erwartungswert von X abweicht.

4.3 Der Test wird mithilfe eines Teststreifens durchgeführt, auf dem ein Indikator aufgebracht ist. Ist die Indikatormenge auf einem Teststreifen kleiner als 15 mg, so ist dieser unbrauchbar. Der Hersteller der Teststreifen verfolgt das Ziel, dass höchstens 10 % der hergestellten Teststreifen unbrauchbar sind, und führt deshalb regelmäßig eine Qualitätskontrolle durch. Dazu wird der laufenden Produktion eine Stichprobe von 100 Teststreifen entnommen. Nur wenn sich darunter mindestens 16 unbrauchbare Teststreifen befinden, entscheidet man sich dafür, das Herstellungsverfahren zu verbessern.

4.3.1 Beschreiben Sie, welche Fehlentscheidungen bei dieser Qualitätskontrolle auftreten können. 4 BE

4.3.2 Der Hersteller entschließt sich, die Kontrolle künftig mit einer größeren Stichprobe von 200 Teststreifen durchzuführen. Die Wahrscheinlichkeit für eine unnötige Verbesserung des Herstellungsverfahrens soll durch diese Änderung mindestens halbiert werden. 5 BE

Ermitteln Sie, wie groß die Anzahl unbrauchbarer Teststreifen, ab der man sich dafür entscheidet, das Herstellungsverfahren zu verbessern, nun mindestens sein muss.

5 Wahlaufgabe Stochastik

Ein Institut für Ernährungsforschung untersucht die Essgewohnheiten von in Deutschland lebenden Personen einer bestimmten Altersgruppe.

Im Folgenden wird davon ausgegangen, dass sich 30 % der Personen der betrachteten Gruppe häufig von Fertiggerichten ernähren.

5.1 Beschreiben Sie im Sachzusammenhang ein Zufallsexperiment, bei dem die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses mit dem Term 3 BE

$$1-\sum_{k=55}^{200}\binom{200}{k}\cdot 0{,}3^k\cdot 0{,}7^{200-k}$$

berechnet werden kann. Geben Sie dieses Ereignis an.

5.2 Es werden Personen der betrachteten Gruppe zufällig ausgewählt. 3 BE

Ermitteln Sie, wie groß die Anzahl der ausgewählten Personen mindestens sein müsste, damit sich von diesen mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 99 % mindestens eine Person häufig von Fertiggerichten ernährt.

Neben der Ernährung durch Fertiggerichte wird auch der Verzehr von Zucker untersucht. Der Anteil der Personen der betrachteten Gruppe, die sich häufig von Fertiggerichten ernähren und zu viel Zucker verzehren, beträgt 24 %. Insgesamt beträgt der Anteil aller Personen, die sich nicht häufig von Fertiggerichten ernähren und zu viel Zucker verzehren 28, %. Aus der betrachteten Gruppe wird eine Person zufällig ausgewählt.

Untersucht werden folgende Ereignisse:

- F: „Die Person ernährt sich häufig von Fertiggerichten."
- Z: „Die Person verzehrt zu viel Zucker."

5.3 Stellen Sie den Sachverhalt in einer vollständig ausgefüllten Vierfeldertafel dar und deuten Sie $P\left(F\cap\overline{Z}\right)$ im Sachzusammenhang. 4 BE

5.4 Nun werden fünf Personen aus der betrachteten Gruppe zufällig ausgewählt. 3 BE

Geben Sie einen Term an, mit dem die Wahrscheinlichkeit dafür berechnet werden kann, dass keine dieser Personen zu viel Zucker verzehrt und sich höchstens zwei von ihnen häufig von Fertiggerichten ernähren.

5.5 Die Geschäftsführerin einer Firma für Fertiggerichte vermutet, dass der Anteil der Personen, die sich von Fertiggerichten ernähren, erhöht hat. Dazu stellt sie die Nullhypothese „Der Anteil der Personen, die sich von Fertiggerichten ernähren, ist höchstens 30 %." auf und untersucht diese auf einem Signifikanzniveau von 4 % bei einer Stichprobengröße von 450 Personen.

5.5.1 Bestimmen Sie die zugehörige Entscheidungsregel. 5 BE

5.5.2 Beurteilen Sie die Größe des Fehlers zweiter Art, wenn sich tatsächlich 32 % der Personen von Fertiggerichten ernähren. 2 BE